

Аффинные преобразования - 2

05 июля

1. Докажите, что при аффинном преобразовании не меняется отношение площадей:

- (а) Двух треугольников с общим углом; (в) Двух произвольных треугольников;
(б) Двух треугольников с общей стороной; (г) Двух выпуклых многоугольников.

2. (а) Докажите, что медианы треугольника делят его на 6 равновеликих (т.е. равных по площади) треугольников. (б) Из медиан треугольника построили новый треугольник. Найдите отношение его площади к площади исходного треугольника.

3. Через точку Р, лежащую внутри треугольника АВС, проведены три прямые, параллельные сторонам АВ, ВС и СА и пересекающие стороны ВС, АС и АВ соответственно в точках А', В' и С'. (а) Докажите, что

$$\frac{PA'}{AB} + \frac{PB'}{BC} + \frac{PC'}{CA} = 1.$$

(б) Пусть S_1, S_2, S_3 — площади трёх треугольников, которые высекают данные прямые, а S — площадь треугольника АВС. Докажите, что $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$.

4. На сторонах АВ, ВС, СА треугольника АВС выбраны соответственно точки М, N, Р и построены симметричные им точки M_1, N_1, P_1 относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что треугольники МNP и $M_1N_1P_1$ равновелики.

5. В данный остроугольный треугольник АВС впишите прямоугольник заданной площади так, чтобы две вершины лежали на стороне АВ, а две другие — по одной на оставшихся сторонах. Какую наибольшую площадь он может занимать?

6. На сторонах АВ, ВС, СА треугольника АВС взяты точки C_1, A_1, B_1 соответственно такие, что $AC_1/AB = BA_1/BC = CB_1/CA = 1/3$. Докажите, что площадь треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1 равна $1/7$ площади АВС.

7. Площадь треугольника АВС равна единице. На его сторонах АВ, ВС и АС отмечены произвольные точки К, L и М соответственно. Докажите, что площадь хотя бы одного из треугольников МАК, KBL или LCM не превосходит $1/4$.

8. (а) Докажите, что два четырёхугольника переводятся друг в друга аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда диагонали этих четырёхугольников делятся точками пересечения в соответственно равных соотношениях.

(б) Докажите, что любой четырёхугольник можно перевести аффинным преобразованием во вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями.

(в) Через середину каждой диагонали выпуклого четырёхугольника проводится прямая, параллельная другой диагонали. Эти прямые пересекаются в точке О. Докажите, что отрезки, соединяющие точку О с серединами сторон четырёхугольника, делят его площадь на равные части.